Tablette de vente de propriétés retrouvée à Shuruppak, ancienne ville sumérienne de Mésopotamie (XXVIe siècle av. J.-C.).

Un peu d'histoire

Chiffres et nombres

*Dans la numération occidentale – la plus répandue aujourd'hui –, les **nombres** sont formés à partir de **chiffres**. De dix chiffres (système décimal). Pourquoi dix ? Peut-être à cause du nombre de doigts que nous possédons. Toujours est-il qu'avec dix chiffres (0 à 9), nous savons « fabriquer » une infinité de nombres, même les plus grands.*

*Suivant la place qu'il occupe dans un nombre, un chiffre représentera une **unité**, une **dizaine**, une **centaine**, etc.*

34
25 199
5 768 967

millions
centaines de milliers
dizaines de milliers
milliers
centaines
dizaines
unités

Dans ce système de numération, la place de chaque chiffre est importante et la changer modifie fondamentalement la valeur du nombre :

- 72 n'est pas la même chose que 27
- 384 n'est pas la même chose que 438

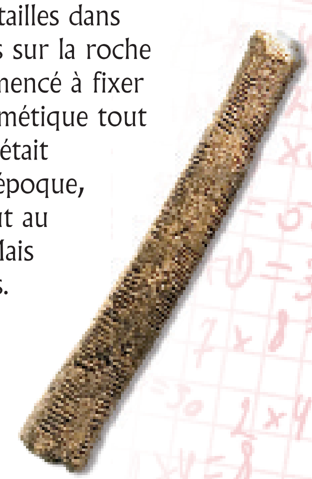
Le sais-tu ?

La **numération** désigne le mode de représentation des nombres dans différentes cultures ou au cours du temps.

Aujourd'hui, que ferions-nous sans les chiffres ? Que ce soit pour payer notre pain, téléphoner à un ami, ou même jouer avec une console, ils nous sont indispensables. Mais en a-t-il toujours été ainsi ?

À l'aube de l'humanité

On peut imaginer qu'il y a quelques dizaines de milliers d'années les hommes préhistoriques avaient compris la nécessité de pouvoir compter. Pour dénombrer leurs prises de chasse ou leur bétail, pour mesurer la supériorité numérique de leur clan ou simplement… pour reconnaître les trèfles à quatre feuilles. C'est certainement en faisant des entailles dans un morceau de bois ou des marques sur la roche que nos lointains ancêtres ont commencé à fixer les bases de l'***arithmétique***. Une arithmétique tout d'abord très rudimentaire puisqu'il n'était vraisemblablement pas question, à l'époque, de division ou de multiplication. Tout au plus d'addition et de soustraction. Mais les premiers pas étaient déjà franchis.



Vieux de vingt-trois mille ans, cet os, trouvé dans la région d'Ishango (République démocratique du Congo) et couvert d'incisions, était-il un « livre de comptes », une « calculette », un calendrier ?

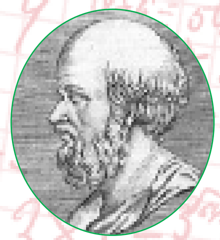
Sur des tablettes d'argile

C'est en ***Mésopotamie***, trois mille ans avant notre ère, qu'apparaissent les premiers signes – on ne parle pas encore de chiffres – qui vont permettre aux hommes de comptabiliser les récoltes. Le papier n'a pas encore été inventé, alors on fait ses « comptes » sur des tablettes d'argile sur lesquelles on imprime des marques à l'aide d'un ***calame***, un roseau taillé en pointe.

De l'utilitaire à l'abstraction

Les ***Égyptiens*** délaissent l'argile pour le papyrus, mais les mathématiques restent, pour eux, principalement utilitaires : calculs de surfaces et de volumes, bien utiles pour leurs travaux d'irrigation et de construction, gestion des récoltes.
Avec les ***Grecs***, changement de programme : les mathématiques sortent du domaine de l'utilitaire pour entrer dans celui de l'abstraction.
Les mathématiciens grecs (par ailleurs philosophes, astronomes…) organisent les nombres, les classent : nombres pairs, impairs, premiers, racines, etc.
Leurs connaissances en calcul les aident à mesurer la hauteur des pyramides ou à prédire les éclipses (***Thalès***, 625-547 av. J.-C.) ou à estimer la circonférence de la Terre (***Ératosthène***, vers 284-vers 192 av. J.-C.)…
Mais surtout, les Grecs « inventent » la géométrie, découvrent les propriétés du cercle, des triangles, des droites, des angles. Ils énoncent des règles, des ***axiomes***, des ***théorèmes***, qui sont encore à la base de notre savoir en géométrie, vingt-cinq siècles plus tard.

Thalès



Ératosthène

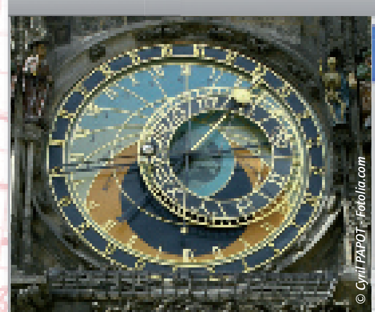
L'heure

*Ce sont les Égyptiens qui, les premiers, ont découpé la journée en 24 heures. D'abord la nuit, puis le jour, en 12 heures chacun, ce qui faisait que ces « tranches » n'avaient pas la même longueur toute l'année. En reprenant la **base sexagésimale** (base 60) des Babyloniens, les heures ont été, à leur tour, découpées en 60 minutes, et chaque minute en 60 secondes (temps du battement d'un cœur au repos). Bien qu'il soit assez logique d'énoncer l'heure en utilisant le découpage en 24 heures :*

- 14 h • 20 h 15 • 22 h 45 • 2 h 55

on continue, dans certains pays – dont la France – à employer le découpage en deux fois 12 heures :

- 2 h de l'après-midi • 8 h du soir • 10 h du soir • 2 h du matin



Horloge astronomique (Prague).

À quoi ça sert ?

*Les **nombres** servent principalement à compter, à dénombrer, à évaluer.*

- il y a 24 élèves dans cette classe
- ce vase a 2 400 ans
- une année compte 365 jours

Mais les nombres ont également d'autres fonctions comme mesurer, classer, ordonner, calculer ou même tout simplement… jouer.

Mesurer

Mesurer, c'est comparer. Comparer avec un élément commun à tous, une référence universelle, un étalon.

- le stade mesure 120 m de long

*C'est sous la Révolution française que s'est mis en place le **système métrique**, définissant des étalons standards, comme, par exemple, le mètre, représenté par une barre en platine-iridium déposée au Pavillon de Breteuil à Sèvres (92).*

Classer, ordonner

Grâce aux nombres, on peut classer des éléments les uns par rapport aux autres, les ordonner :

- j'ai sélectionné les tomates de plus de 200 grammes
- il est arrivé 24e au marathon

Calculer

Si nous n'avions pas les nombres, comment pourrions-nous calculer le temps que mettra une sonde pour sortir du système solaire, voir que nous dépassons la vitesse autorisée ou simplement partager un paquet de bonbons ?

Le sais-tu ?

Même sans compter, nous pouvons repérer l'arbre qui possède le plus de fruits ou la troupe la plus importante. Cette faculté, nous la partageons avec les singes, les rats mais aussi avec... les pigeons.

- *Rudimentaire : très simple, peu développé.*
- *Abstraction : idée théorique.*

Les quatre opérations

Que seraient les nombres si on ne pouvait rien en faire ? Il est vraisemblable qu'à peine « inventés », les hommes ont commencé à les additionner et à les soustraire. C'était la moindre des choses s'ils voulaient évaluer les récoltes, dénombrer leurs troupeaux ou compter les jours pour fabriquer un calendrier. Multiplication et division sont certainement venues plus tard, notamment pour évaluer la surface d'un lopin de terre ou se partager un butin. Quant aux opérations plus complexes (carrés, racines, etc.), elles sont apparues bien longtemps après.

- ***addition*** *[symbole ou opérateur : +]* — 12 + 23 = **25** — 142 + 3 + 18 = **163**
- ***soustraction*** *[symbole ou opérateur : −]* — 32 − 10 = **22** — 856 − 25 − 54 = **777**
- ***multiplication*** *[symbole ou opérateur : x]* — 5 x 13 = **65** — 7 x 12 x 26 = **2 184**
- ***division*** *[symbole ou opérateur : / ou ÷ ou :]* — $\underbrace{210}_{\text{terme 1}}\ \underbrace{/}_{\text{opérateur}}\ \underbrace{30}_{\text{terme 2}} = \underbrace{7}_{\text{résultat}}$ — 9 450 ÷ 75 = **75,6**

Dans l'**addition** et la **multiplication**, les termes peuvent être permutés. On dit que ces deux opérations sont ***commutatives***.

▶ 12 + 23 = **25** • 23 + 12 = **25** : ***résultats identiques***

▶ 51,2 x 13 = **665,6** • 13 x 51,2 = **665,6** : ***résultats identiques***

Dans la **soustraction**, la permutation des termes donne un résultat avec un nombre identique MAIS avec un signe opposé.

▶ 124 − 56 = **68** • 56 − 124 = **−68** : ***résultats opposés***

Quant à la **division**, la permutation des termes donne des résultats différents MAIS qui sont, en fait... inverses.

▶ 198 ÷ 13 = **15,23...** • 13 ÷ 198 = **0,065 656**... : ***résultats inverses***

Multiplier

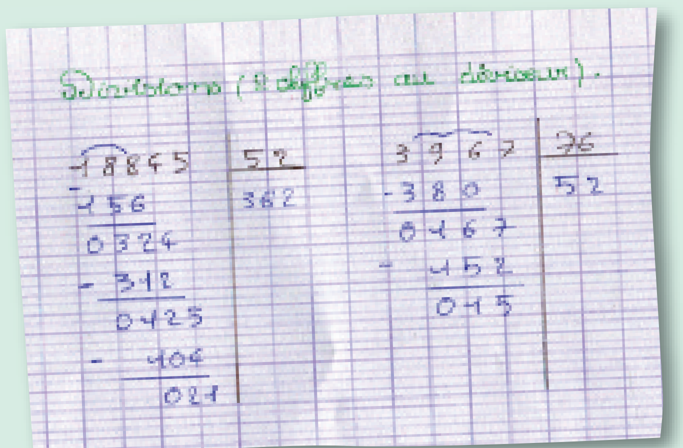
S'il n'est pas vraiment nécessaire d'apprendre des tables d'addition et de soustraction, il n'en est pas de même pour la multiplication. Connaître – par cœur – les tables de multiplication (au moins celles de 2 à 9) simplifie grandement la vie. Bien sûr, il y a les calculettes, mais il n'est pas mal de faire fonctionner sa mémoire à chaque fois qu'on le peut.

À noter que le résultat de la **multiplication** de deux nombres s'appelle le **produit**.

Diviser

Des quatre opérations simples, la division est souvent celle qui pose le plus de problèmes. Nous n'avons malheureusement pas la place dans cet ouvrage pour détailler le fonctionnement de la division. Se référer aux manuels scolaires ou, mieux, demander aux professeurs de math qu'ils vous l'expliquent.

▶ $\underbrace{442}_{\text{dividende}} \div \underbrace{17}_{\text{diviseur}} = \underbrace{\textbf{26}}_{\text{résultat ou quotient}}$ • 3 822 ÷ 26 = **147** • 9 500 ÷ 2 365 = **4,0169**...



Quelques règles à propos des divisions :
Un nombre est divisible :

- par ***2*** s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8
  ▶ 60 • 322 • 564 • 1 456 • etc. sont divisibles par **2**
- par ***3*** si la somme des chiffres se divise par 3
  ▶ 81 —> 8 + 1 = 9 (81 est donc divisible par **3**)
  3 561—> 3 + 5 + 6 + 1 = 15 (3 561 est donc divisible par **3**)
  452—> 4 + 5 + 2 = 11 (452 n'est pas divisible par **3**)
- par ***5*** s'il se termine par 0 ou 5
  ▶ 125 • 250 • 1 485 • 2 360 • etc. sont divisibles par **5**
- par ***10*** s'il se termine par 0
  ▶ 720 • 580 • 7 590 • 10 000 • etc. sont divisibles par **10**

À noter que la division est l'inverse de la multiplication (et vice versa).
Ainsi, diviser par l'inverse d'un nombre équivaut à multiplier ▶ 125 ÷ 5 équivaut à 125 x 0,2 (0,2 étant l'inverse de 5)
Comment trouver l'inverse d'un nombre ? En divisant 1 par ce nombre ▶ inverse de 2 —> 1/2 soit 0,5 • inverse de 47 —> 1/47 soit 0,021

Égalité et inégalité

Quand on compare **deux nombres**, il n'y a pas cinquante possibilités.

- soit ils sont égaux et on utilise alors le signe bien connu de l'égalité **=** ▶ nombre de pages du livre = 210
- soit ils sont à peine différents et on utilise le signe **≃** qui veut dire environ ▶ nombre d'enfants dans la cour ≃ 100
- soit ils sont très différents et on utilise le signe **≠** (signe égal barré) ▶ 720 ≠ 125

S'ils sont différents, il y en a un plus grand et un plus petit. On utilise alors les signes **>** (strictement plus grand, supérieur) et **<** (strictement plus petit, inférieur)

▶ 720 > 125 • 3 785 < 932 • 12 > − 458 • − 1 042 < − 321

Ces signes (> et <) sont surtout intéressants quand on doit résoudre des petits (ou des grands) problèmes mathématiques, comme celui-ci .

Béa a moins d'amis sur Facebook qu'Antoine (A = 22 amis) mais plus que Caroline (C = 19 amis). Combien Béa a-t-elle d'amis (B = ?) ?
On peut écrire le problème ainsi : **B < A** et **B > C** ou encore **B < 22** et **B > 19** (autre notation **A > B > C** ou **22 > B > 19**).
Sans autres informations, on pourra dire que Béa a 20 ou 21 amis, sans être plus précis. Mais si l'énoncé du problème nous avait indiqué que le nombre d'amis de Béa n'est pas 1,5 [une fois et demie] son âge et qu'elle a 14 ans, on aurait alors le nombre exact de ses amis : **20**.

Carré et racine carrée

Le **carré** d'un nombre est le *produit* (le résultat de la multiplication) de ce nombre par lui-même :

▶ 3 x 3 = **9** • 12 x 12 = **144** • 158 x 158 = **24 964**

Pour obtenir le carré d'un nombre sur une calculette, saisir le nombre et appuyer sur la touche **x** puis sur **=**.

Pour noter un carré, on fait suivre le nombre du chiffre 2 en exposant. Dans ce cas, on dit « nombre au carré » ou, plus rarement il est vrai, « nombre puissance 2 ».

▶ 3^2 [trois au carré] = **9** • 12^2 [douze au carré] = **144** • 158^2 [cent cinquante-huit au carré] = **24 964**

L'utilisation de l'exposant est intéressante car, pour un nombre qui se multiplie plusieurs fois par lui-même (on appelle ça une **puissance** et on dit que le nombre est élevé à cette puissance), la notation s'en trouve fortement simplifiée.

▶ 2 x 2 x 2 x 2 est noté 2^4 [deux puissance quatre] = **16** • 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 5^7 [cinq puissance sept] = **78 125**

signifie que le nombre 2 est multiplié 4 fois par lui-même — *signifie que le nombre 5 est multiplié 7 fois par lui-même*

La **racine carrée** est la réciproque du carré. Ainsi, la racine carrée de 9 est 3 (puisque le carré de 3 est 9), celle de 25 est 5 (puisque le carré de 5 est 25), etc. Pour noter une racine carrée, on utilise le symbole √‾.

▶ $\sqrt{9}$ [racine carrée de 9] = **3** • $\sqrt{169}$ [racine carrée de 169] = **13**

Si quelques racines carrées tombent juste, comme c'est le cas ci-dessus, la plupart ont un résultat qui se présente sous forme d'un nombre décimal, voire d'un irrationnel.

▶ $\sqrt{7}$ = **2,645 751**... • $\sqrt{28}$ = **5,291 502**... • $\sqrt{146{,}41}$ = **12,1** (nombre décimal)

Le sais-tu ?
Un « nombre puissance trois » se dit le plus souvent « nombre au cube », comme un « nombre puissance deux » se dit « nombre au carré ».
▶ 7^3 [sept au cube] = **343**

Comme il existe des « nombres au carré », des « nombres au cube » ou des « nombres à la puissance *n* », il existe, en plus des **racines carrées** que nous venons de voir, des **racines cubiques** ou des **racines... énièmes**. Mais là, ça devient très compliqué à calculer. D'ailleurs, les calculettes ordinaires se contentent, la plupart du temps, de nous donner la racine carrée d'un nombre, ce qui est souvent suffisant.

Pour obtenir une racine carrée sur une calculette « ordinaire », saisir le nombre et appuyer sur la touche **√**.

Sans indication, le symbole √‾ représente une racine... carrée.
Au-delà, on met un chiffre en exposant pour éviter toute confusion :

▶ $\sqrt[3]{27}$ [racine troisième ou racine cubique de 27] = **3**
car 3^3 = 27 [3 x 3 x 3 = 27]
• $\sqrt[5]{32}$ [racine cinquième de 32] = **2** car 2^5 = 32

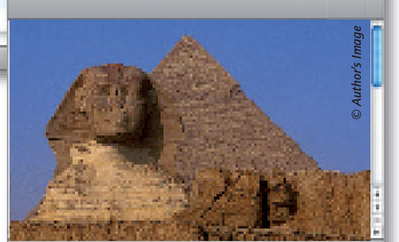
Magiques et mystérieux

Pourquoi ce nombre (713 705) brille-t-il de mille feux dans le ciel ? Retourne le livre et tu comprendras.

Les nombres ne sont pas de simples « instruments » pour calculer, mesurer, évaluer. Certains exercent sur notre imaginaire une fascination qui va parfois bien au-delà des mathématiques.

Pi chez Kheops ?

Pourquoi les architectes égyptiens ont-ils construit la pyramide de Kheops de telle sorte que le rapport de sa surface par le double de sa hauteur soit égal à π ? Pour certains, c'est une des nombreuses « énigmes » de l'histoire qu'ils aimeraient bien percer. Pour d'autres, il s'agirait là d'une… simple coïncidence.



Le sais-tu ?

Comment te souvenir des dix premiers chiffres du nombre π ? En mémorisant cette phrase : ***que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages.***

Compte le nombre de lettres de chaque mot (que = 3 • j = 1 • aime = 4, etc.) et tu obtiendras : π = 3,141 592 653 5

Pi, attaché au cercle

Quel est ce nombre qu'on appelle ***pi*** (représenté par la lettre grecque π) et surtout, à quoi sert-il ?
C'est une constante, indispensable pour calculer la ***circonférence*** (périmètre) ou la ***surface*** d'un ***cercle*** mais également la ***surface*** ou le ***volume*** d'une ***sphère***.
C'est un nombre irrationnel (voir p. 9), c'est-à-dire qu'il possède, après la virgule, un nombre illimité de chiffres, que les ordinateurs calculent par millions, voire même par milliards, ce qui, en soit, n'a pas beaucoup d'intérêt, reconnaissons-le. Une valeur approchée de π est 3,14 (on prononce souvent « ***trois quatorze*** »).

Circonférence du cercle [C]

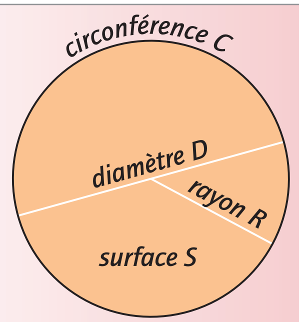
$$C = \pi \times D$$

▶ si D = 12 mm : C ≈ **37,68** mm

Surface du cercle [S]

$$S = \pi \times R^2$$

▶ si R = 6 mm : S ≈ **113,04** mm²



Il semblerait que, deux mille ans avant notre ère, les ***Babyloniens*** utilisaient déjà une valeur proche de π pour calculer le périmètre et la surface des cercles. Depuis, de nombreux mathématiciens – dont le célèbre ***Archimède*** (287-212 av. J.-C.) – ont donné des valeurs de π de plus en plus proches de celle qui nous sert dans nos calculs aujourd'hui.

Le nombre d'or

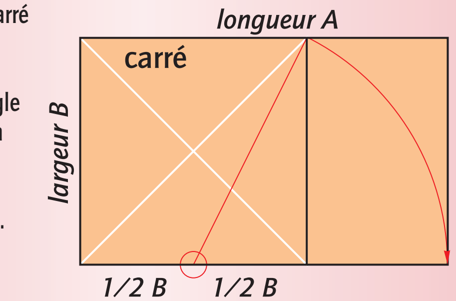
C'est le rapport entre deux longueurs qui serait, pour certains, le plus beau, le plus harmonieux qui soit. La proportion… idéale en quelque sorte.

La valeur du nombre d'or est définie par la formule :

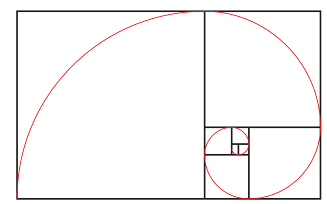
$$\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$ soit approximativement **1,618**

Construction d'un rectangle d'or

C'est à partir d'un carré qu'on construit – à l'aide d'un simple compas – un rectangle dont le rapport de la longueur [A] sur la largeur [B] sera... de 1,618 (nombre d'or).

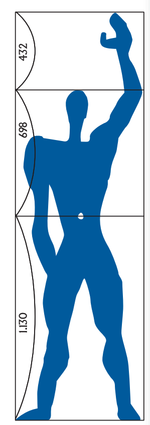


Ce ***nombre d'or*** a été utilisé dès l'Antiquité, notamment par les Grecs, pour construire des temples ou des bâtiments publics. C'est ainsi que les spirales des colonnes de certains temples grecs ont été tracées à partir de cette valeur, qu'on appelle parfois la ***divine proportion***, car certains pensent qu'on la retrouve un peu partout dans l'Univers, ce qui est loin d'être le cas.



Colonne ionique grecque avec son chapiteau à volutes (enroulements en spirale).

Le célèbre architecte ***Le Corbusier*** (1887-1965) a utilisé ce nombre d'or pour établir un système de mesures – qu'il a appelé le ***Modulor*** –, à partir duquel il a construit de nombreux édifices, comme, entre autres, la ***Cité radieuse*** à Marseille. D'autres artistes ont utilisé ce nombre d'or dans certaines de leurs œuvres. C'est notamment le cas du compositeur ***Iannis Xenakis*** ou du peintre ***Salvador Dali***.



Le modulor, inventé par Le Corbusier en 1943.

Le sais-tu ?

Si on divise 1 par le **nombre d'or**, on obtient... 0,618.
Et si on retire 1 au **nombre d'or**, on obtient... 0,618.
Étonnant, non ?

Sept, un chiffre bien étrange

C'est fou comme on le retrouve partout, ce chiffre 7. Des 7 jours de la semaine aux 7 merveilles du monde, en passant par les 7 péchés capitaux, les 7 couleurs de l'arc-en-ciel, les 7 notes de musique ou même le 7e ciel…
Et ne parlons pas des 7 nains de Blanche-Neige, des 7 boules de cristal, des 7 femmes de Barbe-Bleue, des 7 filles de l'ogre du Petit Poucet (lui-même appartenant à une fratrie de 7 garçons), des bottes de 7 lieues ou des 7 mouches attrapées par le petit tailleur des frères Grimm.

Sur un dé, la somme des faces opposées fait toujours... 7.

Il a été mis à toutes les sauces ce pauvre chiffre 7. Mais pourquoi lui et pas un autre ?
Il faut certainement aller chercher cette notoriété du côté des religions monothéistes, le chiffre 7 étant très présent dans la Bible (Dieu n'a-t-il pas créé le monde en 7 jours ?) mais également dans le Coran.
Alors, magique le chiffre 7 ? Certains le pensent, mais ça reste à démontrer. En tout cas, il ne serait pas le seul, car le chiffre 4 n'est pas mal non plus. Il y a 4 saisons, 4 points cardinaux, 4 éléments (feu, air, eau, terre), 4 marques dans les jeux de cartes. On n'y va pas par 4 chemins, on monte les escaliers 4 à 4, la maison est ouverte aux 4 vents, on se dit ses 4 vérités, etc.

- *Constante : qui ne change pas, qui est toujours la même.*
- *Religion monothéiste : qui n'accepte qu'un seul dieu.*